函数性态

宁智伟

1. 单调性
2. 极值
3. 最值
4. 凹凸性，拐点

单调性：

定理6.1 设$f:I\to R$在I上连续，在I内可导，则下述命题成立：

（1）f在I上单调增(减)的充要条件是在I内$f'\geq 0(f'\leq 0)$；

（2）若在I内$f'>0(f'<0)$，则f在I上严格单调增(减)

极值：

6.2设f在x_0的某一领域内可导，并且$f'(x_0) = 0$

（1）若$x < x_0$时，$f'(x) \geq 0$；$x > x_0$时，$f'(x) \leq 0$，则f在x_0处取极大值。

（2）若$x < x_0$时，$f'(x) \leq 0$；$x > x_0$时，$f'(x) \geq 0$，则f在x_0处取极小值。

（3）若$f'(x)$在x_0的左右两侧符号不变，则f在x_0处不取极值。

6.3设f在x_0处二阶可导，并且$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) \neq 0$，则当$f''(x_0) > 0(< 0)$时，f在x_0处取级小（大）值。

极值

6.4　设函数$f(x)$在点x_0处存在n阶导数，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$

（1）当n为奇数时，$f(x)$在点x_0不取极值；

（2）当n为偶数时，$f(x)$在点x_0取极值，且当$f^{(n)}(x_0)<0$时，$f(x)$在点x_0取最大值；当$f^{(n)}(x_0)>0$时，$f(x)$在点x_0取得极小值

1. 函数在极值点的左右邻域内一定单调？

2. 若$f'(x_0) > 0$，则存在x_0的某领域，在此领域内$f(x)$单递增？

最值性：

由闭区间上连续函数的性质可知，如果函数$f(x)$在[a, b]上连续，则$f(x)$在[a, b]上一定存在最大最小值，且最值为极值或者端点对应的函数值

一般是建立一个目标函数，在某一区间内求解最优化问题，例如最大容积, 最短路径, 最短用时….

根据临床数据分析知，在给病人注射一种降压药时，用药剂量x（mg)(x<=30)导致的血压下降量为$D(x) = 0.025^{x^2}(30 - x)$. 试问，注射药物剂量为多少时，血压下降幅度达到最大。

凹凸性与拐点

6.5 设函数$f(x)$在区间I中二阶可导，则

（1）若在I内恒有$f''(x) > 0$，则$f(x)$的图像在I中是凹的；

（2）若在I内恒有$f''(x) < 0$，则$f(x)$的图像在I中是凸的；

连续曲线上凹的图像段与凸的图像段的转变点称为该曲线的**拐点**。

凹凸性与拐点

设函数$f(x)$在点x_0的某个领域内有二阶导数， $f''(x_0)$=0，如果在点x_0邻近两侧，$f''(x)$异号，则点（ x_0，$f(x_0)$）是曲线y=$f(x)$的一个拐点

斜渐进线

若直线y=kx+b是曲线$y=f(x)$当$x \to +\infty$时的一条斜渐近线，则有

（1） $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ；

（2） $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b.$

例如：求$y = \frac{x^2+2x}{x+1}$的渐进线

判定曲线$y=(x-1)\sqrt[3]{x^5}$的凹凸性，并求拐点。

$$f'(x)=x^{\frac{5}{3}}+\frac{5}{3}(x-1)x^{\frac{2}{3}}=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{4x-1}{\sqrt[3]{x}},\quad x\neq 0$$

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$
$f''(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	下凸	拐点	下凹	拐点	下凸

1. $\dfrac{|a+b|}{\pi+|a+b|} \le \dfrac{|a|}{\pi+|a|} + \dfrac{|b|}{\pi+|b|}$

2. 若$0 \le x_1 < x_2 < x_3 \le \pi$，证明：

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} > \frac{\sin x_3 - \sin x_2}{x_3 - x_2}$$

治学团后续还会推出一系列相关活动，想继续了解的可以扫描屏幕前二维码关注我们的公众号。欢迎大家扫码关注哦！！

谢谢大家